

PROPRIÉTÉS
ET
MODÈLES GÉOMÉTRIQUES
DE
COURBES ET SURFACES



Département de Génie Mécanique

école —————
normale —————
supérieure —————
paris — saclay —————

Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay

S. Lavernhe

Septembre 2017

Table des matières

1	Modes de description des courbes et surfaces	3
1.1	Forme explicite	3
1.2	Forme implicite	3
1.3	Formulation intrinsèque	4
2	Propriétés intrinsèques des courbes	5
2.1	Représentation analytique	5
2.2	Abscisse curviligne	5
2.3	Vecteur tangent	6
2.4	Vecteur normal et binormal	6
2.5	Courbure	7
2.6	Torsion	8
2.7	Cercle osculateur	13
3	Propriétés intrinsèques des surfaces	14
3.1	Représentation analytique	14
3.2	Première forme fondamentale (I)	14
3.3	Normale et plan tangent	18
3.4	Seconde forme fondamentale (II)	19
3.5	Théorème de Meunier	20
3.6	Théorème d'Euler	21
3.7	Courbures Gaussienne et Moyenne	25
4	Modèles de courbes	26
4.1	Courbes de Bézier	26
4.1.1	Fonctions de Bernstein	26
4.1.2	Propriétés géométriques des courbes de Bézier	26
4.1.3	Formulation matricielle	29
4.1.4	Dérivée d'une courbe de Bézier	29
4.1.5	Algorithme de Casteljau	30
4.2	Courbes BSpline	30
4.2.1	Fonctions de mélange	32
4.2.2	Propriétés géométriques des courbes BSpline	36
4.3	Courbes NURBS	37
4.3.1	Forme homogène	37
4.3.2	Forme rationnelle	38

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
4.3.3 Propriétés géométriques des courbes NURBS	38
4.3.4 Algorithme de Casteljau	39
5 Bibliographie	39

1 Modes de description des courbes et surfaces

Il existe deux formes de description : explicite ou implicite

1.1 Forme explicite

Elle est du type : $y = f(x)$

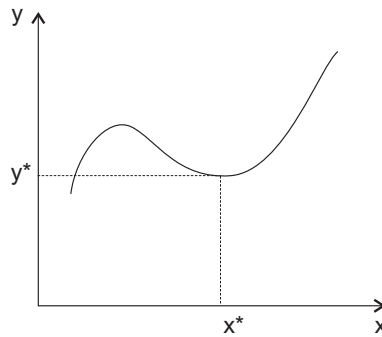


FIGURE 1 – Type de courbe décrite en forme explicite.

- à chaque valeur de x , il existe une et une seule valeur de y
- cette formulation ne permet pas de décrire des courbes fermées ou qui se croisent plusieurs fois

1.2 Forme implicite

Elle est du type : $f(x, y) = 0$

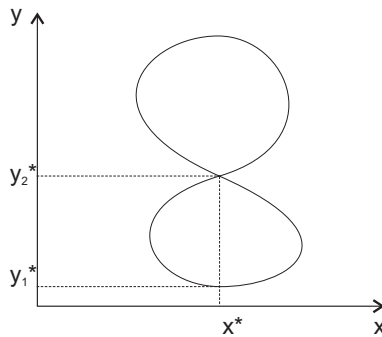


FIGURE 2 – Type de courbe décrite en forme implicite.

- il existe deux solutions au couple (x^*, y^*)
- à un x^* donné, on trouve 2 solutions y_1^* et y_2^*

La description sous forme implicite ou explicite dépend du choix du repère utilisé. Le choix du système de coordonnées affecte la facilité de calcul des propriétés géométriques et de la manipulation des éléments. Une forme de description non liée au repère est une description intrinsèque.

1.3 Formulation intrinsèque

Elle est basée sur les propriétés locales des courbes et surfaces. C'est une définition morceaux par morceaux de la géométrie. Pour être complètement définie, une courbe nécessite deux équations intrinsèques.

- une sur la courbure : κ
- une sur la torsion : τ

toutes deux fonctions de l'abscisse curviligne s :

$$\kappa = f(s) \quad \text{et} \quad \tau = g(s)$$

où τ représente la déviation ou "twist" de la courbe par rapport à une courbe plane, s la longueur mesurée le long de la courbe et $\frac{1}{\kappa}$ le rayon local de la courbure.

Les équations naturelles relient par une équation unique courbure, torsion et abscisse curviligne.

$$f(\kappa, \tau, s) = 0$$

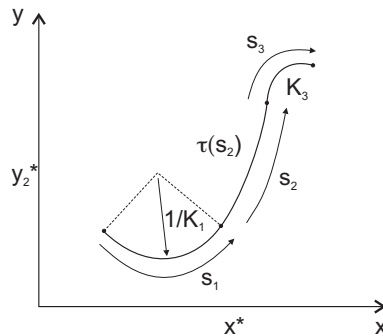


FIGURE 3 – Type de courbe décrite par les équations naturelles.

Une équation naturelle impose une condition sur une courbe pour qu'elle ait certaines propriétés, mais il eut exister plusieurs courbes satisfaisant ces propriétés.

2 Propriétés intrinsèques des courbes

2.1 Représentation analytique

La méthode la plus utilisée pour représenter les courbes et les surfaces est une description explicite sous forme paramétrique. Une courbe $y = f(x)$ se décompose en deux fonctions de paramètre u

$$\begin{cases} x = x_1(u) \\ y = x_2(u) \end{cases} \quad u_1 \leq u \leq u_2$$

Un point P de coordonnées (x, y, z) sera noté :

$$x_i = x_i(u) \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{pour } (x, y, z) \quad \text{ou } (x_1, x_2, x_3)$$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{x} = x_1.\underline{e}_1 + x_2.\underline{e}_2 + x_3.\underline{e}_3 \quad \text{dans la base } (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$$

On supposera par la suite :

$$\underline{\dot{x}}(u) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \neq 0 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \quad u \in [u_1, u_2]$$

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

2.2 Abscisse curviligne

Pour une courbe de paramètre u , la longueur d'une portion de courbe définie entre deux points $A(u_0)$ et $P(u)$ vaut :

$$s(u) = \int_{u_0}^u \|\underline{\dot{x}}(u)\|.du \quad \text{avec } \underline{\dot{x}}(u) = \frac{d\underline{x}}{du} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow ds = \|\underline{\dot{x}}(u)\|$$

Remarques :

- l'abscisse curviligne s augmente lorsque u augmente,
- le sens où s augmente définit le sens "positif" de la courbe, on parle alors de courbe orientée.

2.3 Vecteur tangent

Le vecteur tangent est défini par :

$$\underline{t} = \frac{d\underline{x}}{ds} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = d\underline{x} \cdot d\underline{x} \\ \Leftrightarrow \frac{d\underline{x}}{ds} \cdot \frac{d\underline{x}}{ds} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{d\underline{x}}{ds} &\text{ est un vecteur unitaire} \end{aligned}$$

- le vecteur \underline{t} est unitaire,
- son sens définit le sens positif de la courbe

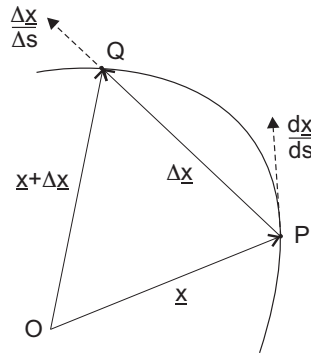


FIGURE 4 – Illustration du vecteur tangent

Remarque : $\frac{\underline{x}}{du} = \frac{\underline{x}}{ds} \times \frac{ds}{du}$ est un vecteur tangent non unitaire; en effet, $\frac{ds}{du} \in \mathbb{R}$

2.4 Vecteur normal et binormal

Ils sont définis par

- vecteur binormal :

$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{x}} \wedge \ddot{\underline{x}}}{\|\dot{\underline{x}} \wedge \ddot{\underline{x}}\|} \quad (2)$$

- vecteur normal :

$$\underline{n} = \underline{b} \wedge \underline{t} \quad (3)$$

permettant ainsi de créer le repère de Serret-Frenet au point courant : $(\underline{x}, \underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$

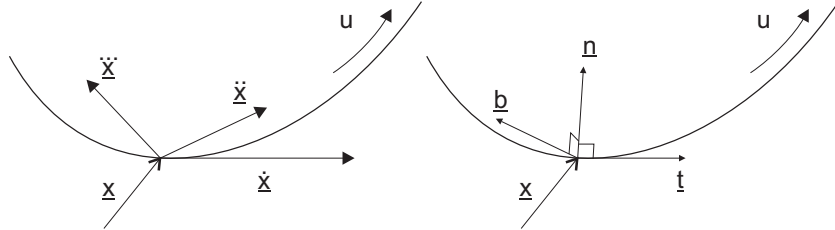


FIGURE 5 – Vecteurs dérivés et base de Serret-Frenet

Le plan passant par \underline{x} et orienté par \underline{t} et \underline{n} est nommé plan osculateur $(O, \underline{t}, \underline{n})$. Son équation est

$$\det\left(\begin{bmatrix} \underline{y} & \underline{x} & \dot{\underline{x}} & \ddot{\underline{x}} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det(\underline{y} - \underline{x}, \dot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}}) = 0 \quad \text{où } \underline{y} \in 0$$

Son équation paramétrique est

$$O(x, y) = \underline{x} + u.\dot{\underline{x}} + v.\ddot{\underline{x}} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

2.5 Courbure

$$\begin{aligned} \underline{t} &= \frac{d\underline{x}}{ds} \quad \rightarrow \quad \underline{t}.\underline{t} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d\underline{x}}{ds}.\frac{d\underline{x}}{ds} = 1 \\ \text{par différentiation} &\Rightarrow \quad \frac{d^2\underline{x}}{ds^2}.\frac{d\underline{x}}{ds} + \frac{d\underline{x}}{ds}.\frac{d^2\underline{x}}{ds^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d^2\underline{x}}{ds^2}.\frac{d\underline{x}}{ds} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d\underline{t}}{ds}.\underline{t} = 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\frac{d\underline{t}}{ds}$ et \underline{t} sont donc perpendiculaires. Ensuite,

$$\begin{aligned} \underline{t} &= \frac{d\underline{x}}{ds} = \frac{d\underline{x}}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \dot{x} \cdot \frac{du}{ds} \\ \Rightarrow \frac{d\underline{t}}{ds} &= \frac{d\dot{x}}{ds} \cdot \frac{du}{ds} + \dot{x} \cdot \frac{d^2u}{ds^2} \\ \text{or } \frac{d\dot{x}}{ds} &= \frac{d\dot{x}}{du} \cdot \frac{du}{ds} \\ \text{d'où } \frac{d\underline{t}}{ds} &= \ddot{x} \cdot \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \dot{x} \cdot \frac{d^2u}{ds^2} \end{aligned}$$

Le vecteur $\frac{d\underline{t}}{ds} \in$ au plan formé par \dot{x} et \ddot{x} , soit le plan osculateur. On introduit alors le vecteur courbure \underline{k} défini par :

$$\boxed{\underline{k} = \frac{d\underline{t}}{ds} = \kappa \cdot \underline{n}} \quad (4)$$

\underline{k} représente le vecteur de courbure et κ la valeur de la courbure. Si \underline{n} est pris dans le sens de $\frac{d\underline{t}}{ds}$ alors $\kappa \geq 0$.

2.6 Torsion

$(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$ est une base orthonormée directe, d'où

$$\begin{aligned} \underline{b} \cdot \underline{t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d\underline{b}}{ds} \cdot \underline{t} + \underline{b} \cdot \frac{d\underline{t}}{ds} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d\underline{b}}{ds} \cdot \underline{t} = -\underline{b} \cdot \frac{d\underline{t}}{ds} &= -\underline{b} \cdot \kappa \cdot \underline{n} \\ \rightarrow \frac{d\underline{b}}{ds} &\perp \underline{t} \end{aligned} \quad (5)$$

De même,

$$\begin{aligned} \underline{b} \cdot \underline{b} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{d\underline{b}}{ds} \cdot \underline{b} + \underline{b} \cdot \frac{d\underline{b}}{ds} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d\underline{b}}{ds} \cdot \underline{b} &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{db}{ds} \perp \underline{b} \quad (6)$$

Des équations (5) et (6) on déduit que $\frac{db}{ds}$ est colinéaire à \underline{n} . On définit alors la relation :

$$\boxed{\frac{db}{ds} = -\tau \cdot \underline{n}} \quad (7)$$

où τ représente la torsion.

Enfin,

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \underline{n} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{dn}{ds} \cdot \underline{n} + \underline{n} \cdot \frac{dn}{ds} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dn}{ds} \cdot \underline{n} &= 0 \\ \rightarrow \frac{dn}{ds} &\perp \underline{n} \end{aligned} \quad (8)$$

On peut donc écrire $\frac{dn}{ds}$ sous la forme :

$$\frac{dn}{ds} = \lambda_1 \cdot \underline{t} + \lambda_2 \cdot \underline{b}$$

Expressions de λ_1 et λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{dn}{ds} \cdot \underline{t} \quad \text{or} \quad \underline{n} \cdot \underline{t} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dn}{ds} \cdot \underline{t} &= -\underline{n} \cdot \frac{dt}{ds} \\ \text{d'où} \quad \lambda_1 &= -\underline{n} \cdot \frac{dt}{ds} = -\underline{n} \cdot \kappa \underline{n} = -\kappa \\ \lambda_2 &= \frac{dn}{ds} \cdot \underline{b} \quad \text{or} \quad \underline{n} \cdot \underline{b} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dn}{ds} \cdot \underline{b} &= -\underline{n} \cdot \frac{db}{ds} \\ \text{d'où} \quad \lambda_2 &= -\underline{n} \cdot \frac{db}{ds} = -\underline{n} \cdot (-\tau \underline{n}) = \tau \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\frac{dn}{ds} = -\kappa \cdot \underline{t} + \tau \cdot \underline{b}} \quad (9)$$

En résumé, les équations 4, 7 et 9 sont connues sous le nom de formules de Serret-Frenet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\underline{t}}{ds} = \kappa \cdot \underline{n} \\ \frac{d\underline{n}}{ds} = -\kappa \cdot \underline{t} + \tau \cdot \underline{b} \\ \frac{d\underline{b}}{ds} = -\tau \cdot \underline{n} \end{array} \right.$$

Expression des courbure et torsion en fonction de s :

Par définition,

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{t}}{ds} &= \kappa \cdot \underline{n} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} &= \kappa \cdot \underline{n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \kappa = \kappa(s) = \left\| \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} \right\| \quad (10)$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{b}}{ds} &= -\tau \cdot \underline{n} \\ \Leftrightarrow \tau &= -\underline{n} \cdot \frac{d\underline{b}}{ds} \\ \Leftrightarrow \tau &= -\underline{n} \cdot (\underline{t} \wedge \frac{d\underline{n}}{ds})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{en effet, } \underline{t} \wedge \frac{d\underline{n}}{ds} &= \underline{t} \wedge (-\kappa \underline{t} + \tau \underline{b}) \\ &= \tau \cdot (\underline{t} \wedge \underline{b}) \\ &= -\tau \cdot \underline{n} \\ &= \frac{d\underline{b}}{ds}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où, } \tau &= -\left(\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2}\right) \cdot \left(\frac{d\underline{x}}{ds} \wedge \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{\kappa^2} \cdot \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} \cdot \left(\frac{d\underline{x}}{ds} \wedge \frac{d^3 \underline{x}}{ds^3}\right) \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \cdot \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} \cdot \left(\frac{d^3 \underline{x}}{ds^3} \wedge \frac{d\underline{x}}{ds}\right) \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \cdot \frac{d\underline{x}}{ds} \cdot \left(\frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} \wedge \frac{d^3 \underline{x}}{ds^3}\right) \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \cdot \det \left(\frac{d\underline{x}}{ds}, \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2}, \frac{d^3 \underline{x}}{ds^3}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\tau = \tau(s) = \frac{\det \left(\frac{d\underline{x}}{ds}, \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2}, \frac{d^3 \underline{x}}{ds^3}\right)}{\left(\frac{d^2 \underline{x}}{ds^2}\right)^2}} \quad (11)$$

Expression des courbure et torsion en fonction de u :

Il faut exprimer $\frac{d\underline{x}}{ds}$, $\frac{d^2 \underline{x}}{ds^2}$, $\frac{d^3 \underline{x}}{ds^3}$ en fonction de \dot{x} , \ddot{x} , $\ddot{\ddot{x}}$.

$$\frac{d\underline{x}}{ds} = \frac{d\underline{x}}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \frac{\frac{d\underline{x}}{du}}{\frac{ds}{du}} = \frac{\dot{\underline{x}}}{\|\dot{\underline{x}}\|} = \frac{\dot{x}}{(\dot{x} \cdot \dot{x})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} = \ddot{\underline{x}} \cdot \left(\frac{du}{ds}\right)^{\frac{1}{2}} + \dot{\underline{x}} \cdot \left(\frac{d^2 u}{ds^2}\right) \quad \text{voir calcul de courbure}$$

$$\text{or } \frac{du}{ds} = \frac{1}{(\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}})^{\frac{1}{2}}} \quad \text{donc } \left(\frac{du}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}}} = \frac{\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}}}{(\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}})^2}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{d^2 u}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{du}{ds}\right) = \frac{d}{ds} \left((\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}})^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{du} \left((\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}})^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{du}{ds} \\ &= -\frac{1}{2} (\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}})^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{d}{du} (\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}}) \cdot (\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}})^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} (\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}})^{-2} \cdot 2 \cdot \ddot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}} \\ &= -\frac{\ddot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}}}{(\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}})^2} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \frac{d^2 \underline{x}}{ds^2} = \frac{(\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}}) \cdot \ddot{\underline{x}} - (\ddot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}}) \cdot \dot{\underline{x}}}{(\dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}})^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \underline{x}}{ds^3} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 \underline{x}}{ds^2}\right) = \frac{d}{ds} \left(\ddot{\underline{x}} \cdot \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \dot{\underline{x}} \cdot \left(\frac{d^2 u}{ds^2}\right)\right) \\ &= \frac{d}{ds} (\ddot{\underline{x}}) \cdot \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \ddot{\underline{x}} \cdot \frac{d}{ds} \left(\left(\frac{du}{ds}\right)^2\right) + \frac{d\dot{\underline{x}}}{ds} \cdot \frac{d^2 u}{ds^2} + \dot{\underline{x}} \cdot \frac{d^3 u}{ds^3} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \frac{d}{ds} (\ddot{\underline{x}}) \cdot \left(\frac{du}{ds}\right)^2 = \frac{d\ddot{\underline{x}}}{du} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \left(\frac{du}{ds}\right)^2 = \ddot{\ddot{\underline{x}}} \cdot \left(\frac{du}{ds}\right)^3$$

$$\text{et } \ddot{\underline{x}} \cdot \frac{d}{ds} \left(\left(\frac{du}{ds}\right)^2\right) = 2\ddot{\underline{x}} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{d^2 u}{ds^2}$$

$$\text{et } \frac{d\dot{\underline{x}}}{ds} \cdot \frac{d^2 u}{ds^2} = \ddot{\underline{x}} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{d^2 u}{ds^2}$$

ce qui permet d'arriver enfin à

$$\frac{d^3 \underline{x}}{ds^3} = \ddot{\ddot{\underline{x}}} \cdot \left(\frac{du}{ds}\right)^3 + 3\ddot{\underline{x}} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{d^2 u}{ds^2} + \dot{\underline{x}} \cdot \frac{d^3 u}{ds^3}$$

A l'aide de ces termes, on aboutit à l'expression des courbures et torsions :

$$\boxed{\kappa = \kappa(u) = \frac{\|\dot{\underline{x}} \wedge \ddot{\underline{x}}\|}{\|\dot{\underline{x}}\|^3}} \quad (12)$$

$$\boxed{\tau = \tau(u) = \frac{\det(\dot{\underline{x}}, \ddot{\underline{x}}, \ddot{\ddot{\underline{x}}})}{\|\dot{\underline{x}} \wedge \ddot{\underline{x}}\|^2}} \quad (13)$$

2.7 Cercle osculateur

On définit le cercle osculateur par son centre \underline{c} et son rayon ρ :

$$\underline{c} = \underline{x} + \rho \cdot \underline{n} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{1}{\kappa} \quad \text{rayon de courbure} \quad (14)$$

Il est donc défini dans le plan osculateur :

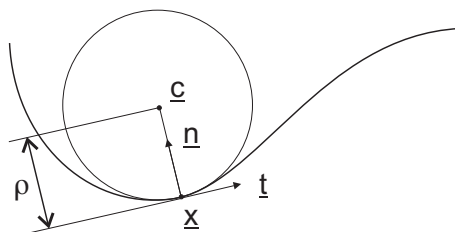


FIGURE 6 – Plan et cercle osculateur

La base de Frenet définit ainsi 3 plans :

- le plan osculateur $(\underline{x}, \underline{t}, \underline{n})$
- le plan normal $(\underline{x}, \underline{n}, \underline{b})$
- le plan rectifiant $(\underline{x}, \underline{t}, \underline{b})$

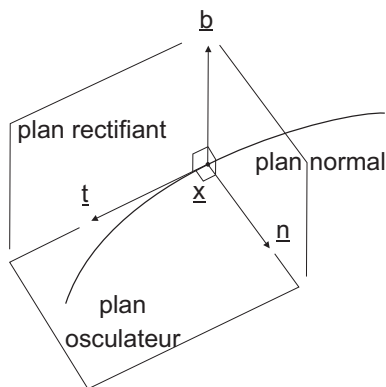


FIGURE 7 – Plans de la base de Frenet

3 Propriétés intrinsèques des surfaces

3.1 Représentation analytique

Tout comme pour les courbes, on utilise principalement une description paramétrique :

$$x_i = x_i(u, v) \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{pour} \quad (x, y, z) \quad \text{ou} \quad (x_1, x_2, x_3)$$

avec u, v deux paramètres (variables réelles) dans un intervalle fermé :

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \leq u \leq u_2 \\ v_1 \leq v \leq v_2 \end{array} \right\}$$

Les paramètres u et v sont indépendants, donc la matrice M doit être de rang 2 pour toutes valeurs de u et v . Si M est de rang 1 ou 0, alors en ces points (u, v) on parle de "points singuliers"¹.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Par la suite, on adoptera la notation suivante

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u} \quad \text{et} \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v} \quad (15)$$

et on supposera que $\text{rang}(M) = 2$ pour les surfaces étudiées si nécessaire.

$$\text{rang}(M) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_u \wedge x_v \neq \underline{0} \quad (16)$$

dans ce cas là, si $v = \text{constante}$, alors \underline{x} ne dépend que de u ; si $u = \text{constante}$, alors \underline{x} ne dépend que de v . On définit ainsi les courbes iso-paramétriques. Ces courbes ne sont pas tangentes entre elles.

3.2 Première forme fondamentale (I)

Une courbe sur une surface peut être donnée par la description paramétrique :

$$\left. \begin{array}{l} u = u(t) \\ v = v(t) \end{array} \right\} t \in [t_1, t_2] \text{ de } \mathbb{R}^2$$

1. Attention, car les points singuliers sont dus à la nature même de la surface, mais également au choix du système de coordonnées.

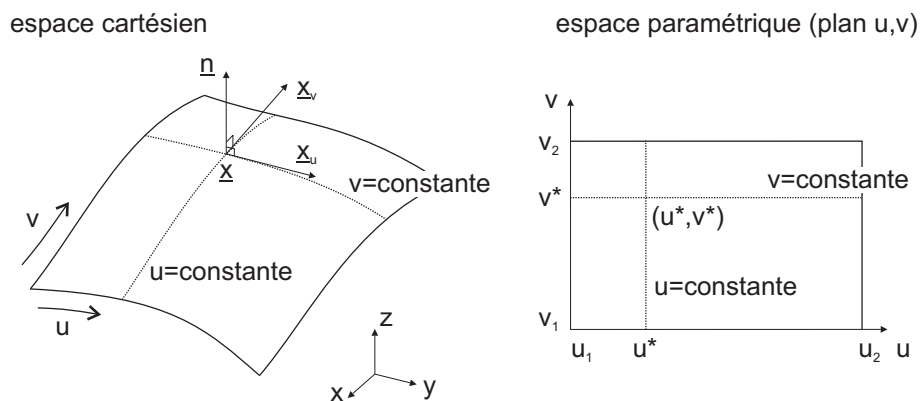


FIGURE 8 – Iso-paramétriques dans l'espace cartésien et dans l'espace paramétrique

Le vecteur $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ à un point P de la surface est donné par

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

C'est un vecteur tangent (non unitaire en général) à la courbe, donc à la surface. Or cette écriture peut être reformulée, indépendamment du paramètre t :

$$d\underline{x} = x_u \cdot du + x_v \cdot dv$$

Le ratio $\frac{dv}{du}$ détermine la direction de la tangente à la surface.

Une petite portion de courbe s'écrit sous la forme :

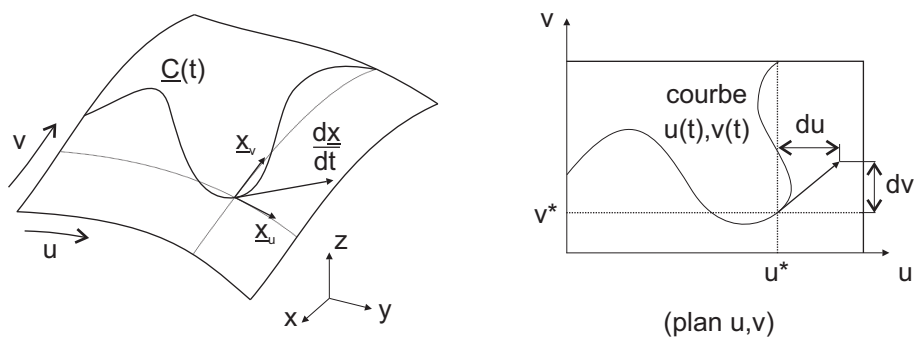


FIGURE 9 – Illustration de la tangente à la surface

$$\begin{aligned}
ds &= \|\dot{x}\|.dt \\
\Leftrightarrow ds^2 &= \|\dot{x}\|^2.dt^2 \\
\Leftrightarrow ds^2 &= \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}\right).dt^2 \\
\Leftrightarrow ds^2 &= \left(x_u \cdot \frac{du}{dt} + x_v \cdot \frac{dv}{dt}\right) \cdot \left(x_u \cdot \frac{du}{dt} + x_v \cdot \frac{dv}{dt}\right).dt^2
\end{aligned}$$

ce qui donne la première forme fondamentale **(I)** :

$$\boxed{ds^2 = E.du^2 + 2F.du.dv + G.dv^2 = \mathbf{(I)}} \quad (17)$$

avec :

$$\begin{aligned}
E &= E(u, v) = x_u \cdot x_u \\
F &= F(u, v) = x_u \cdot x_v \\
G &= G(u, v) = x_v \cdot x_v
\end{aligned}$$

Ainsi, la longueur de la courbe entre t_0 et t vaut :

$$s = \int_{t_0}^t \|\dot{x}\|.dt = \int_{t_0}^t \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.dt$$

Remarques :

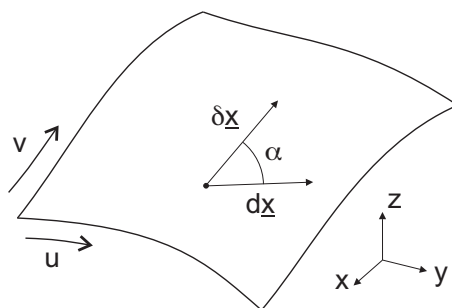
1. Cette première forme fondamentale est dite définie positive : $ds^2 > 0$

$$\begin{aligned}
(17) \quad \Leftrightarrow ds^2 &= \frac{1}{E}(E.du + F.dv)^2 + \frac{1}{E}(EG - F^2)dv^2 \\
\text{or } E = x_u \cdot x_u > 0 &\Rightarrow EG - F^2 > 0
\end{aligned}$$

2. soit deux vecteurs tangents :

$$\begin{aligned}
dx &= x_u \cdot du + x_v \cdot dv \\
\delta x &= x_u \cdot \delta u + x_v \cdot \delta v
\end{aligned}$$

les directions des vecteurs sont données respectivement par les rapports $\frac{dv}{du}$ et $\frac{\delta v}{\delta u}$.

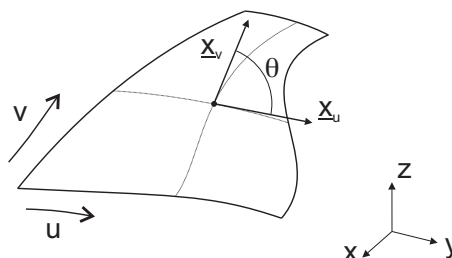
FIGURE 10 – Angle α entre deux vecteurs tangents à la surface

L'angle α entre dx et δx vaut :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{d\underline{x} \cdot \delta \underline{x}}{|d\underline{x}| \cdot |\delta \underline{x}|} \\ &= \frac{E \cdot du \cdot \delta u + F \cdot (du \cdot \delta v + \delta u \cdot dv) + G \cdot dv \cdot \delta v}{\sqrt{E \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot \delta v + G \cdot \delta v^2} \cdot \sqrt{E \cdot \delta u^2 + 2F \cdot \delta u \cdot \delta v + G \cdot \delta v^2}} \\ &= E \frac{du \delta u}{ds \delta s} + F \left(\frac{du \delta v}{ds \delta s} + \frac{dv \delta u}{ds \delta s} \right) + G \frac{dv \delta v}{ds \delta s} \end{aligned}$$

3. d'où l'angle θ entre les isoparamétriques $u = c^{te}$ ($du = 0$) et $v = c^{te}$ ($\delta v = 0$) vaut :

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

FIGURE 11 – Angle θ entre les tangentes aux isoparamétriques

4. Les isoparamétriques sont orthogonales si $F = 0$:

$$x_u \cdot x_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_u \perp x_v$$

3.3 Normale et plan tangent

L'équation du plan tangent est

$$P(u, v) = \underline{x} + \Delta u \cdot x_u + \Delta v \cdot x_v$$

$$\Leftrightarrow \det(\underline{p} - \underline{x}, x_u, x_v) \quad \text{où } p \text{ est un point du plan}$$

La normale au plan tangent (=normale à la surface locale) est :

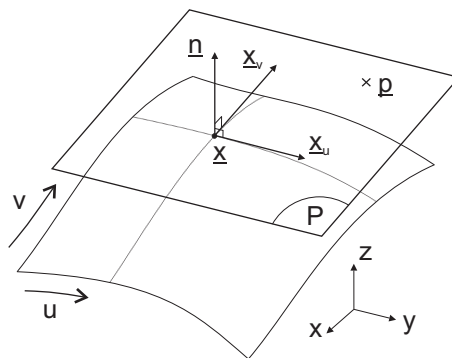


FIGURE 12 – Plan tangent à la surface et sa normale

$$\underline{n} = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{x_u \wedge x_v}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (18)$$

\underline{n} est donc un vecteur unitaire perpendiculaire aux tangentes des isoparamétriques :

$$n^2 = 1 \quad n \cdot x_u = 0 \quad n \cdot x_v = 0$$

Remarque :

Un petit élément de surface $du \cdot dv$ vaut :

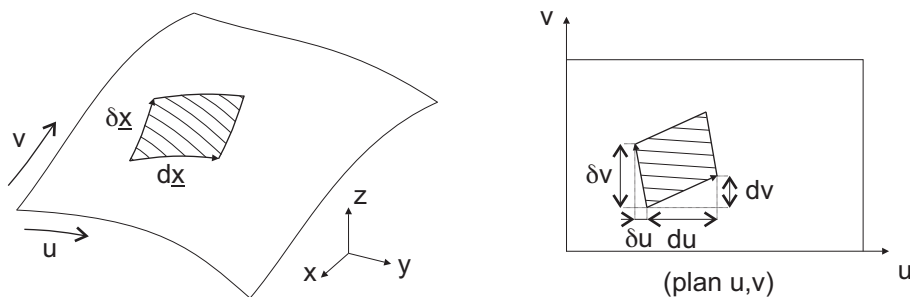
$$dA = |dx \wedge \delta x| = \sqrt{EG - F^2} \cdot |du \cdot \delta v - \delta u \cdot dv|$$

dans le cas des isoparamétriques :

$$d\underline{x} = x_u \cdot du + x_v \cdot dv \quad \text{avec } dv = 0$$

$$\delta \underline{x} = x_u \cdot \delta u + x_v \cdot \delta v \quad \text{avec } \delta u = 0$$

$$\text{d'où } dA = \sqrt{EG - F^2} \cdot du \cdot dv$$

FIGURE 13 – Petit élément de surface formé par deux vecteurs \underline{dx} $\delta \underline{x}$

et l'expression de la surface correspondante :

$$A = \iint_{uv} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

3.4 Seconde forme fondamentale (II)

Pour une courbe C passant par P , le vecteur courbure $\underline{k} = \frac{d\underline{t}}{ds}$. \underline{k} est décomposé en composante normale \underline{k}_n et composante tangentielle \underline{k}_g à la surface.

$$\underline{k} = \underline{k}_n + \underline{k}_g$$

avec \underline{n} la normale unitaire à la surface, on a :

$$\underline{k}_n = \kappa_n \cdot \underline{n}$$

κ_n est appelé "courbure normale" à la surface.

Comme $\underline{n} \perp \underline{t}$ sur la surface, on a :

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \underline{t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d\underline{n}}{ds} \cdot \underline{t} + \underline{n} \cdot \frac{d\underline{t}}{ds} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d\underline{t}}{ds} \cdot \underline{n} &= -\underline{t} \cdot \frac{d\underline{n}}{ds} \\ \Leftrightarrow \kappa_n &= -\frac{d\underline{x}}{ds} \cdot \frac{d\underline{n}}{ds} \\ \Leftrightarrow \kappa_n &= -\frac{d\underline{x} \cdot d\underline{n}}{d\underline{x} \cdot d\underline{x}} \end{aligned}$$

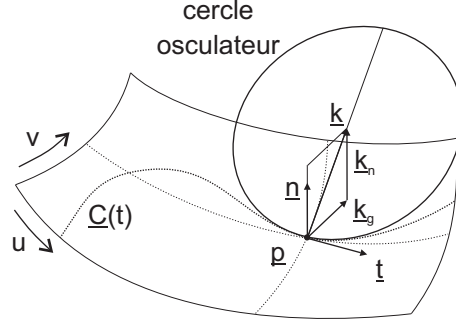


FIGURE 14 – Vecteur courbure \underline{k} et ses projections normale \underline{k}_n et tangentielle \underline{k}_g

en notant $d\underline{n} = n_u \cdot du + n_v \cdot dv$ et $d\underline{x} = x_u \cdot du + x_v \cdot dv$, on arrive à :

$$\kappa_n = -\frac{(x_u \cdot n_u)du^2 + (x_u \cdot n_v + x_v \cdot n_u)dudv + (x_v \cdot n_v)dv^2}{E \cdot du^2 + 2F \cdot dudv + G \cdot dv^2} \quad (19)$$

or comme $\underline{n} \perp x_u$ et x_v :

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot x_u = 0 \quad \text{par différentiation par rapport à } u, \quad n_u \cdot x_u + \underline{n} \cdot x_{uu} = 0 \\ \text{soit} \quad -n_u \cdot x_u = \underline{n} \cdot x_{uu} \\ \text{de même} \quad -n_v \cdot x_v = \underline{n} \cdot x_{vv} \\ \text{par différentiation par rapport à } v, \quad n_v \cdot x_u + \underline{n} \cdot x_{uv} = 0 \\ \text{et} \quad n_u \cdot x_v + \underline{n} \cdot x_{uv} = 0 \\ \text{ce qui se résume en} \quad n_u \cdot x_v = n_v \cdot x_u = -\underline{n} \cdot x_{uv} \end{aligned}$$

On définit alors la seconde forme fondamentale (II) :

$$\boxed{-d\underline{x} \cdot d\underline{n} = L \cdot du^2 + 2M \cdot du \cdot dv + N \cdot dv^2 = \text{(II)}} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad L = L(u, v) &= \underline{n} \cdot x_{uu} = -n_u \cdot x_u \\ M = M(u, v) &= \underline{n} \cdot x_{uv} = -n_u \cdot x_v = -n_v \cdot x_u \\ N = N(u, v) &= \underline{n} \cdot x_{vv} = -n_v \cdot x_v \end{aligned}$$

3.5 Théorème de Meunier

A partir de l'équation (19), en utilisant les 1^{re} et 2^e formes fondamentales (17,20) il est possible d'exprimer directement la courbure normale κ_n au point

\underline{x} selon la direction \underline{t} par :

$$\boxed{\kappa_n(\underline{x}, \underline{t}) = \frac{2^{\text{e}} \text{ forme fondamentale}}{1^{\text{re}} \text{ forme fondamentale}} = \frac{(\mathbf{II})}{(\mathbf{I})}} \quad (21)$$

\underline{t} étant orienté par le rapport $\frac{dv}{du}$

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \kappa \cdot \cos(\varphi) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\rho_n} &= \frac{1}{\rho} \cdot \cos(\varphi) \\ \text{soit } \rho &= \rho_n \cdot \cos(\varphi) \end{aligned}$$

ρ_n est le rayon de courbure normal de la surface

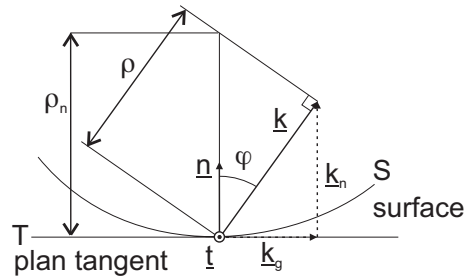
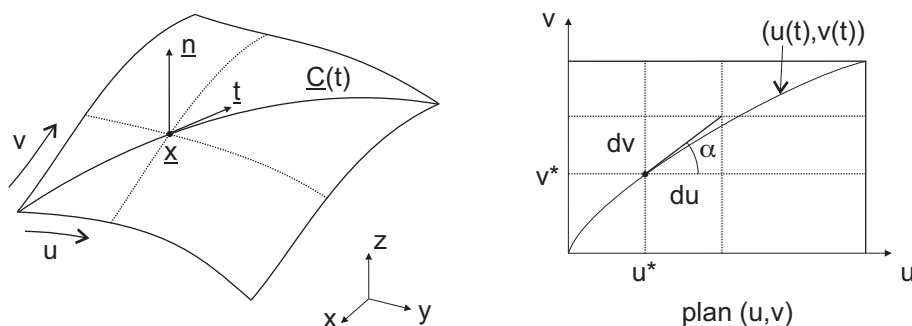


FIGURE 15 – Rayon de courbure ρ et rayon de courbure normal ρ_n

3.6 Théorème d'Euler

Lorsque l'orientation du vecteur tangent \underline{t} varie, la courbure normale évolue. On note

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \lambda = \frac{dv}{du} \\ \text{d'où } \kappa_n(\underline{x}, \underline{t}) &= \kappa_n(\lambda) = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} \end{aligned}$$

FIGURE 16 – Orientation du vecteur tangent \underline{t} **Remarque**

La courbure normale évolue en effet car

$$\kappa_n(\underline{x}, \underline{t}) = \frac{L \cdot du^2 + 2M \cdot du \cdot dv + N \cdot dv^2}{E \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2} = \frac{(\mathbf{II})}{(\mathbf{I})}$$

Or on a vu en 17 que

$$(\mathbf{I}) = ds^2 > 0$$

donc le signe de $\kappa_n(\underline{x}, \underline{t})$ dépend du signe de (\mathbf{II}) .

$$L \cdot du^2 + 2M \cdot du \cdot dv + N \cdot dv^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow L + 2M \cdot \frac{dv}{du} + N \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow L + 2M\lambda + N\lambda^2 = 0$$

L'étude du signe donne trois cas :

1. si

$$LN - M^2 > 0$$

il n'y a pas de solution à l'équation ; le signe de (\mathbf{II}) est le même quel que soit λ . On a une surface concave ou convexe en tout point (ex : ellipsoïde). On parle alors de point "elliptique".

2. si

$$LN - M^2 = 0$$

en tout point de la surface selon une direction donnée, $(\mathbf{II}) = 0 \Leftrightarrow \kappa_n = 0$. La courbure a un point d'inflexion ; c'est le cas de tout point d'un cylindre. On parle de point "parabolique".

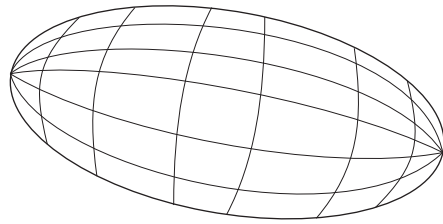


FIGURE 17 – Surface de type ellipsoïde

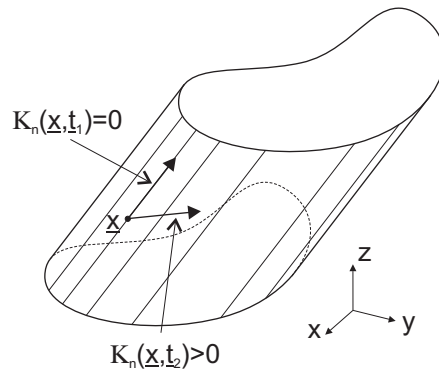


FIGURE 18 – Surface de type cylindre

3. si

$$LN - M^2 < 0$$

le signe dépend de λ . Le signe de κ_n est séparé par deux directions asymptotiques. C'est le cas de la selle de cheval : le paraboloid hyperbolique. On parle de point "hyperbolique".

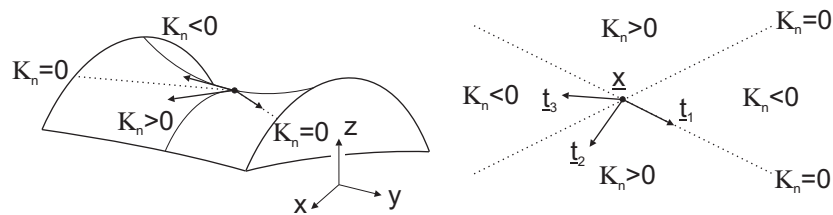


FIGURE 19 – Surface de type paraboloid hyperbolique et directions asymptotiques

Recherche les valeurs maximales et minimales de κ_n lorsque λ évolue :

$$\begin{aligned} & \frac{d\kappa}{d\lambda} = 0 \\ \Leftrightarrow & (E + 2F\lambda + G\lambda^2)(M + N\lambda) - (L + 2M\lambda + N\lambda^2)(F + G\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow & (FN - GM)\lambda^2 + (EN - GL)\lambda + (EM - FL) = 0 \\ \Leftrightarrow & \det \begin{bmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

— Les directions λ_1 et λ_2 donnant les valeurs maximales ou minimales κ_1 et κ_2 sont dites "directions principales de courbure".

— κ_1 et κ_2 sont les "courbures principales" de la surface.

Dans ces cas particuliers, en considérant λ_1 et λ_2 , et en écrivant

$$\begin{aligned} E + 2F\lambda + G\lambda^2 &= (E + F\lambda) + \lambda(F + G\lambda) \\ \text{et } L + 2M\lambda + N\lambda^2 &= (L + M\lambda) + \lambda(M + N\lambda) \end{aligned}$$

la courbure normale à la surface (21) se réécrit :

$$\kappa_n = \frac{[(L + M\lambda) + \lambda(M + N\lambda)].(M + N\lambda)}{[(E + F\lambda) + \lambda(F + G\lambda)].(M + N\lambda)} = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} \quad (22)$$

et

$$\kappa_n = \dots = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda} \quad (23)$$

ainsi, κ_1 et κ_2 satisfont :

$$(22) \Leftrightarrow (F\kappa_n - M) + (G\kappa_n - N)\lambda = 0$$

$$(23) \Leftrightarrow (E\kappa_n - L) + (F\kappa_n - M)\lambda = 0$$

Les solutions de (22) et (23) sont satisfaites pour :

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} \kappa_n E - L & \kappa_n - M \\ \kappa_n F - M & \kappa_n G - N \end{bmatrix} = 0 \\ & \kappa_n^2 - (\kappa_1 + \kappa_2)\kappa_n + \kappa_1\kappa_2 = 0 \\ \text{avec } \kappa_1\kappa_2 &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad \text{et} \quad \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{NE - 2MF + LG}{EG - F^2} \end{aligned}$$

3.7 Courbures Gaussienne et Moyenne

On définit alors :

$$\boxed{\kappa = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad \text{courbure gaussienne}} \quad (24)$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad \text{courbure moyenne}} \quad (25)$$

Dans le cas où les isoparamétriques de surfaces sont des lignes principales de courbure, on a :

$$x_u = x_v = 0 \quad \text{et} \quad x_u v = x_v u = 0$$

$$\Leftrightarrow F = 0 \quad M = 0$$

$$\text{d'où} \quad \kappa_1 = \frac{L}{E} \quad \text{et} \quad \kappa_2 = \frac{N}{G}$$

$$\text{on a alors} \quad \kappa_n(\underline{x}, \lambda) = \frac{L + N\lambda^2}{E + G\lambda^2} = \kappa_1 \frac{E}{E + G\lambda^2} + \kappa_2 \frac{G\lambda^2}{E + G\lambda^2}$$

or soit ψ l'angle entre la direction donnée par $\frac{du}{dv}$ et l'isoparamétrique $v = c^{te}$ ($\delta v = 0$),

$$\cos \psi = \frac{E du \delta u}{ds \sqrt{E \delta u^2}} = \sqrt{E} \frac{du}{ds} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E + G\lambda^2}}$$

$$\sin \psi = \dots = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} = \frac{\sqrt{G}\lambda}{\sqrt{E + G\lambda^2}}$$

$$\text{d'où} \quad \kappa_n(\underline{x}, \lambda) = \kappa_1 \cos^2 \psi + \kappa_2 \sin^2 \psi$$

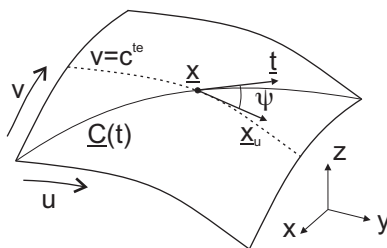


FIGURE 20 – Angle entre la tangente et l'isoparamétrique $v = C^{te}$

4 Modèles de courbes

Dans cette section, les notations utilisées sont celles adoptées dans [1].

4.1 Courbes de Bézier

Une courbe de Bézier $\vec{C}(u)$ est définie par un ensemble de "pôles" \vec{P}_i de \mathbb{R}^3 (encore appelés "points de contrôle" ou "sommets") associés à des fonctions de mélange $B_{i,n}(u)$:

$$\vec{C}(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \cdot \vec{P}_i \quad u \in [0, 1]$$

On définit alors pour la courbe :

- le degré : n
- le nombre d'arc = 1
- le polygone caractéristique comme la séquence des pôles :

$$PG_n = \{\vec{P}_0, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n\}$$

4.1.1 Fonctions de Bernstein

Les fonctions de mélange sont les fonctions de Bernstein :

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}$$

Exemples de fonctions pour divers degrés :

Propriétés des fonctions de Bernstein

Voici une liste non exhaustive de quelques propriétés :

- la non négativité : $B_{i,n}(u) > 0 \quad \forall u \forall i, n$
- la partition de l'unité : $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) = 1 \quad \forall u \in [0, 1]$
- la symétrie par rapport à $u = 0.5$

4.1.2 Propriétés géométriques des courbes de Bézier

Des propriétés des fonctions de mélange découlent des propriétés géométriques :

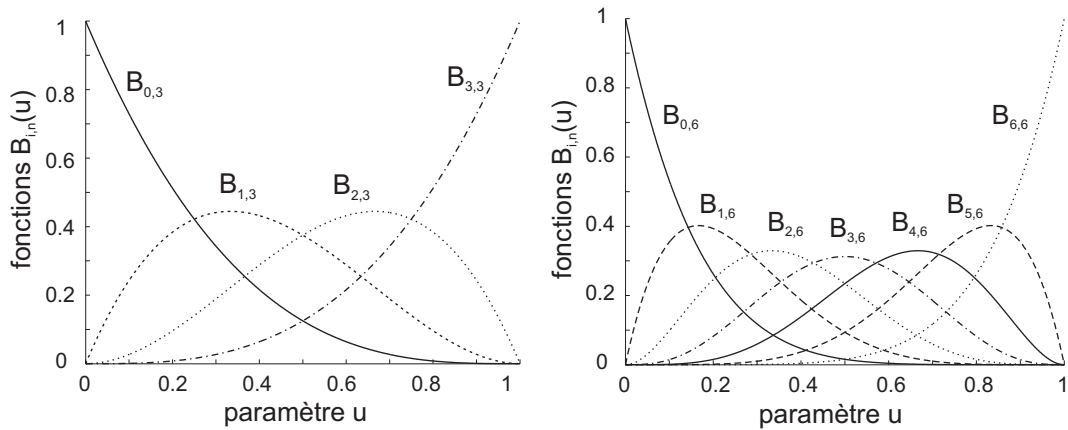


FIGURE 21 – Fonctions de Bernstein pour un courbe de degré 3 (gauche) et degré 6 (droite)

— le passage par les pôles extrémités :

$$\begin{aligned}
 B_{i,n}(0) &= 0 \quad \text{sauf pour } i = 0 & B_{0,n}(0) &= 1 \\
 B_{i,n}(1) &= 0 \quad \text{sauf pour } i = n & B_{n,n}(1) &= 1 \\
 \Rightarrow & \begin{cases} \vec{C}(0) = \vec{P}_0 \\ \vec{C}(1) = \vec{P}_n \end{cases}
 \end{aligned}$$

— la tangence aux extrémités du polygone caractéristique :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{C}(0)}{du} &= n\overrightarrow{P_0P_1} \\
 \frac{d\vec{C}(1)}{du} &= n\overrightarrow{P_{n-1}P_n}
 \end{aligned}$$

— l'orientation de la courbure ou de la concavité :

Elle est donnée par la position relative des 3 premiers et derniers pôles au début ($P_0P_1P_2$) et à la fin ($P_{n-2}P_{n-1}P_n$) de la courbe.

— la réversibilité :

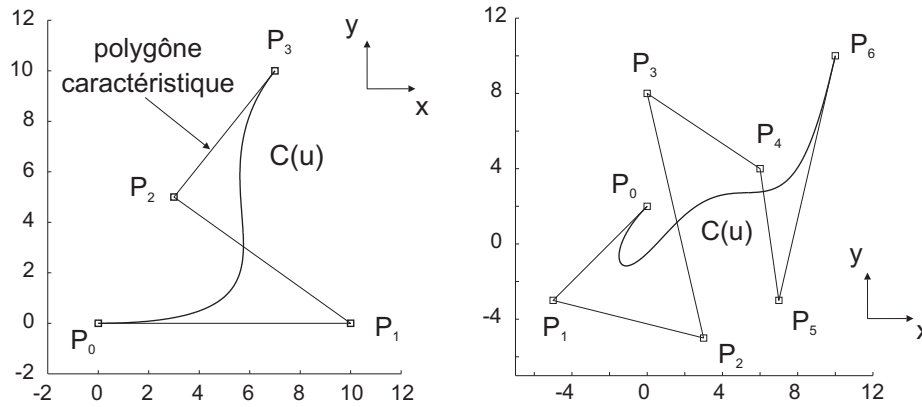


FIGURE 22 – Exemples de tracés des courbes de Bézier et des polygones caractéristiques de degré 3 (gauche) et 6 (droite)

Avec la notation habituelle, on a :

$$PG = \{P_0, \dots, P_n\} \quad \vec{C}(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \cdot \vec{P}_i$$

$$PG' = \{P'_0, \dots, P'_n\} \quad \vec{C}'(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \cdot \vec{P}'_i$$

par inversion de l'ordre des pôles dans le polygone caractéristique, on peut écrire :

$$PG' = \{P_n, \dots, P_0\} \quad \text{d'où} \quad \vec{C}'(u) = \vec{C}(1-u)$$

qui inverse le sens de parcours de la courbe.

— une invariance par transformation affine :

La courbe ne s'en retrouve pas déformée.

— de déplacement d'un pôle :

Modifier les coordonnées d'un pôle affecte toute la courbe : elle se retrouve "déformée" ou "déplacée" avec plus ou moins d'importance selon les valeurs des fonctions de mélange à la valeur du paramètre u considérée. Remarque : les extrémités ne sont pas affectées si ce n'est pas le premier ou dernier pôle qui est modifié.

— d'appartenance au polygone convexe :

Le polygone caractéristique forme un polygone convexe dans lequel est contenue la courbe.

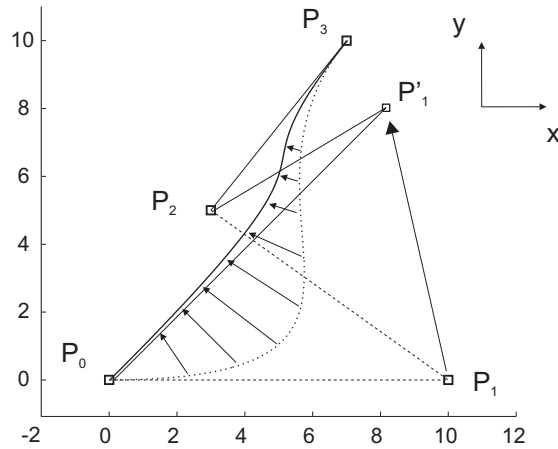


FIGURE 23 – Déformation de la courbe par déplacement d'un pôle

4.1.3 Formulation matricielle

Cette notation est utile pour l'écriture des problèmes d'interpolation et d'approximation. De par sa forme linéaire, une courbe de Bézier

$$\vec{C}(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \cdot \vec{P}_i$$

peut s'écrire comme un produit matriciel

$$\begin{aligned} \vec{C}(u) &= \mathbb{B}_{nn} \cdot \mathbb{P} \\ \text{avec } \mathbb{B}_{nn} &= [B_{0n}(u) \quad B_{1n}(u) \quad \cdots \quad B_{nn}(u)] \\ \text{avec } \mathbb{P} &= \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.1.4 Dérivée d'une courbe de Bézier

Pour les fonction de mélange, on montre que :

$$\begin{aligned} B'_{i,n}(u) &= n(B_{i-1,n-1}(u) - B_{i,n-1}(u)) \\ \text{avec } \begin{cases} B_{-1,n-1}(u) = 0 \\ B_{n,n-1}(u) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

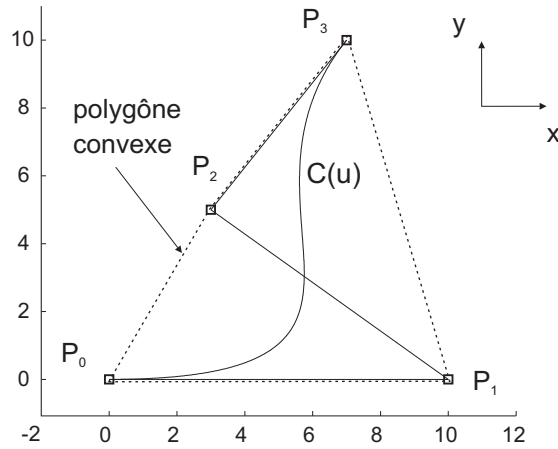


FIGURE 24 – Appartenance de la courbe au polygône convexe

d'où

$$\frac{d\vec{C}(u)}{du} = \sum_{i=0}^n B'_{i,n}(u) \cdot \vec{P}_i$$

4.1.5 Algorithme de Casteljau

Cet algorithme propose une méthode graphique pour déterminer de proche en proche un point de la courbe. Il est basé sur la relation :

$$\vec{C}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(u) \cdot \vec{P}_i^*$$

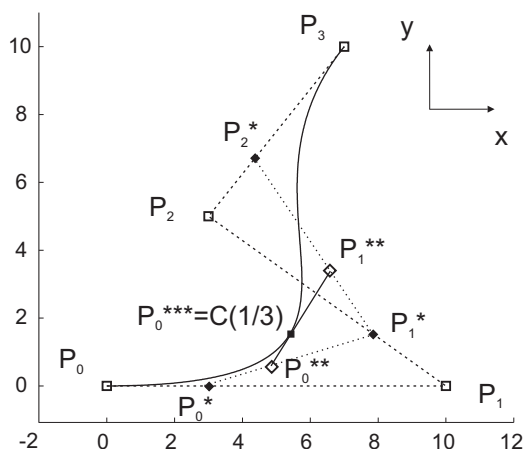
avec $\vec{P}_i^* = (1-u)\vec{P}_i + u\vec{P}_{i+1}$

4.2 Courbes BSpline

Une courbe BSpline $\vec{C}(u)$ est définie par un ensemble de "pôles" \vec{P}_i de \mathbb{R}^3 associés à des fonctions de mélange $N_{i,p}(u)$:

$$\vec{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot \vec{P}_i \quad u \in [a, b]$$

On définit alors pour la courbe :

FIGURE 25 – Construction graphique selon Casteljau pour $u = \frac{1}{3}$

- le polygone caractéristique : $PG_n = \{\vec{P}_0, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n\}$
- le degré : p
- la séquence nodale : $U = [u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_m]$ constituée de $m + 1$ noeuds u_k .

Remarques :

1. une séquence nodale est dite *uniforme* si tous les noeuds sont de multiplicité 1 et équidistants les uns des autres d'une valeur constante :

$$\forall u_j \in [u_0, \dots, u_m] \quad u_j - u_{j+1} = \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}_+$$

2. une séquence nodale est dite *périodique* si il existe une relation périodique pour les $N_{i,p}(u)$: les noeuds peuvent être espacés différemment dans la séquence nodale.
3. une séquence nodale est dite *non uniforme* si on impose une multiplicité de $p + 1$ au premier et dernier noeud. La courbe passera alors le premier et dernier pôle.

Nous considérerons pour la suite uniquement les formes dites *non uniforme* c'est à dire de la forme $U = [a, a, \dots, a, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, b, b, \dots, b]$, où le premier et dernier noeud sont a et b répétés $p + 1$ fois.

Les différents paramètres de la courbe vérifient la relation :

$$\begin{aligned} \text{longueur séquence nodale} &= \text{nombre pôles} + \text{ordre} \\ (m + 1) &= (n + 1) + (p + 1) \end{aligned} \quad (26)$$

4.2.1 Fonctions de mélange

Pour les courbes BSpline, les fonctions de mélange sont définies par la relation de récurrence :

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} \cdot N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \cdot N_{i+1,p-1}(u) \quad (27)$$

avec $N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et par convention $\frac{0}{0} = 0$

Propriétés des fonctions de mélange

— construction :

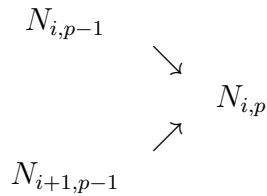
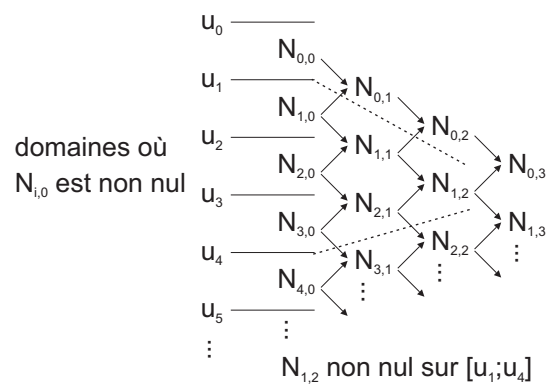


TABLE 1 – Principe de construction des fonctions $N_{i,p}$

de façon générale

$$N_{i,p}(u) = 0 \text{ si } u \notin [u_i, u_{i+p+1}]$$

FIGURE 26 – Diagramme de construction des fonctions $N_{i,p}$

— dérivée :

$$N'_{i,p}(u) = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} \cdot N_{i,p-1}(u) + \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \cdot N_{i+1,p-1}(u)$$

— non négativité ...

— partition de l'unité ...

Exemple de construction des fonctions $N_{i,p}$ avec $n = 4$ $p = 2$ et $U = [00012333]$:

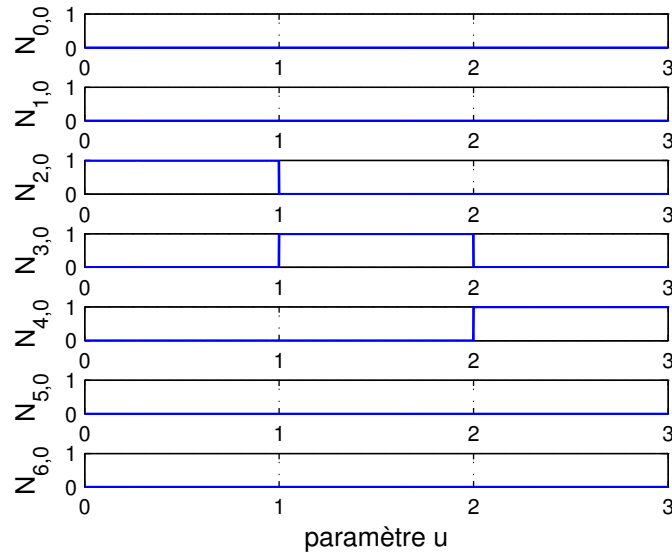


FIGURE 27 – Fonctions de degré 0

$$\left. \begin{array}{l} N_{0,2} \text{ non nul sur } [u_0, u_3] \\ N_{1,2} \text{ non nul sur } [u_1, u_4] \\ N_{2,2} \text{ non nul sur } [u_2, u_5] \\ N_{3,2} \text{ non nul sur } [u_3, u_6] \\ N_{4,2} \text{ non nul sur } [u_4, u_7] \end{array} \right\} [u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7]$$

avec $u_0 = u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = 2, \quad u_5 = u_6 = u_7 = 3$

on vérifie la relation (26) :

$$\begin{aligned} m + 1 &= n + 1 + p + 1 \\ &= 4 + 1 + 2 + 1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

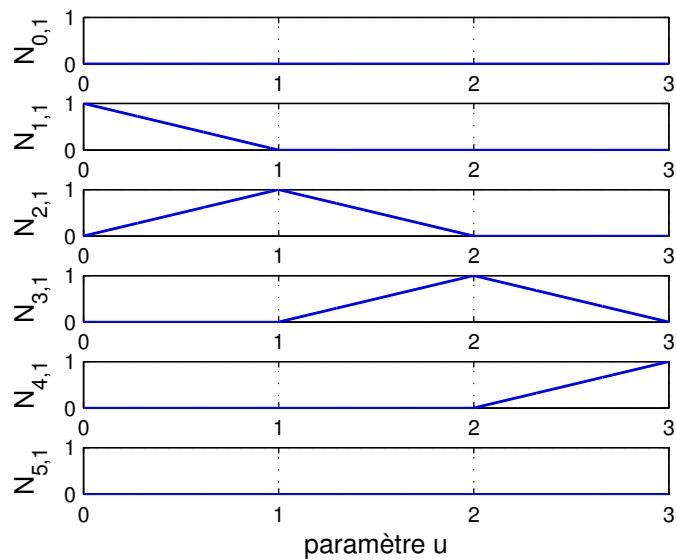


FIGURE 28 – Fonctions de degré 1

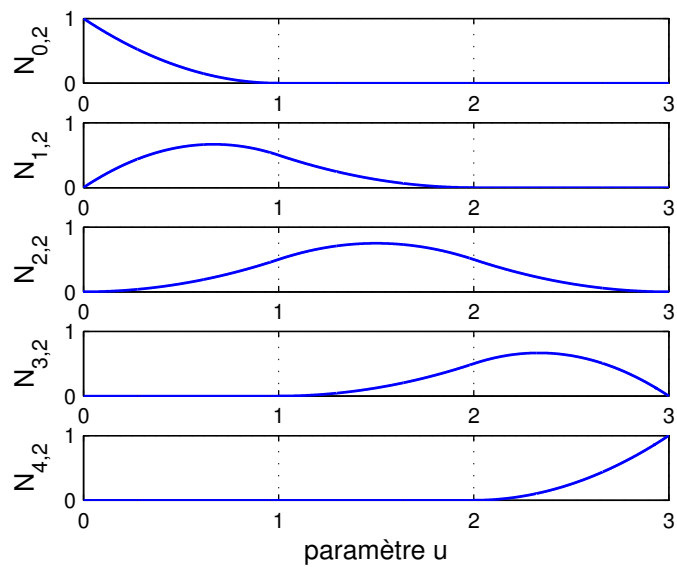


FIGURE 29 – Fonctions de degré 2

4.2.2 Propriétés géométriques des courbes BSpline

- passage par les extrémités
- tangence aux extrémités
- concavité
- réversibilité
- déplacement d'un sommet :
Déplacer \vec{P}_i affecte la fonction mélange $N_{i,p}$ qui est non nulle sur $[u_i, u_{i+p+1}]$; la courbe est seulement modifiée sur cet intervalle.
- polygone convexe par arc :
Chaque arc est contenu dans le polygone convexe formé par les pôles le définissant. Appliqué sur chaque arc, on en déduit que la courbe entière est contenue dans le polygone convexe formé par tous le polygone caractéristique.
- continuité entre arcs :
La continuité est de type C^{p-k} , où k est la multiplicité de la valeur du nœud dans la séquence nodale séparant deux arcs.

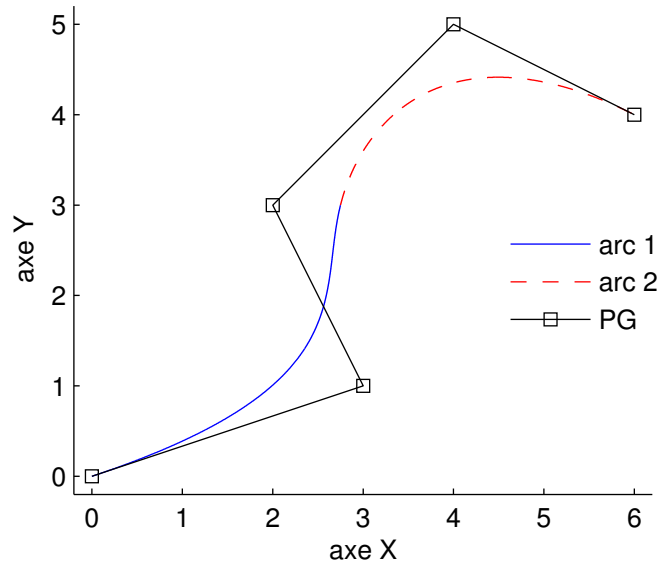


FIGURE 30 – Exemple de courbe BSpline de degré 3 comportant 2 arcs

4.3 Courbes NURBS

Les modèles de Bézier (courbe mono-arc) et BSpline (courbe multi-arcs) sont des fonctions polynomiales. Une évolution de ces modèles consiste à les écrire sous forme rationnelle (Bézier rationnel et BSpline rationnel). La forme la plus générale que l'on retiendra est la forme NURBS (Non Uniform Rational BSpline) : La partie rationnelle est donnée par une fraction combinée à des coefficients pondérateurs sur les pôles tandis que la partie non uniforme est donnée par la séquence nodale.

Ces éléments permettent d'augmenter le nombre de paramètres pour améliorer la capacité géométrique des courbes.

Quelques propriétés spécifiques des courbes NURBS :

- la modélisation des coniques (autre que la parabole qui est représentable par un polynôme)
- l'invariance par transformations projectives (généralisation des transformations affines)

Les courbes NURBS peuvent être décrites sous deux formes : la forme homogène ou la forme rationnelle.

4.3.1 Forme homogène

Les courbes NURBS possèdent 3 composantes pour manipuler la géométrie : les 3 coordonnées (P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}) de chaque pôle \vec{P}_i . L'ajout d'un 4^e paramètre à chaque pôle, le poids w_i , en fait donc un élément de \mathbb{R}^4 . En utilisant une notation des composantes des pôles sous forme homogène, et la propriété d'invariance par application projective, on retrouve une forme rationnelle

dans \mathbb{R}^3 :

NUBS dans $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ ajout des poids $w^i \rightarrow$ NUBS dans \mathbb{R}^4

Forme homogène dans $\mathbb{R}^4 \rightarrow$ appl. projective $H \rightarrow$ forme rationnelle dans \mathbb{R}^3

$$\vec{C}(u) = H \{C^w(u)\} = H \left\{ \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot \vec{P}_i^w \right\} \quad u \in [u_0, u_{n+m+1}]$$

$$\text{avec } \vec{P}_i^w = (w\vec{P})_i = \begin{bmatrix} w_i P_{ix} \\ w_i P_{iy} \\ w_i P_{iz} \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$\text{et l'application projective } H : \vec{P}_{L+1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_L \\ h \end{bmatrix} \xrightarrow{H} \vec{P}_L = \begin{bmatrix} x_1/h \\ x_2/h \\ \vdots \\ x_L/h \end{bmatrix} = H(\vec{P}_{L+1})$$

4.3.2 Forme rationnelle

$$\vec{C}(u) = \sum_{i=0}^n \frac{N_{i,p}(u) \cdot w_i \cdot \vec{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \cdot w_i} \quad u \in [a, b]$$

avec \vec{P}_i : points de contrôle

w_i : poids ou coordonnée homogène

p : degré de la courbe

$N_{i,p}(u)$: fonction de mélange définie en ep.(27)

U : séquence nodale non uniforme du type

$$U = [a, \dots, a, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, b, \dots, b]$$

4.3.3 Propriétés géométriques des courbes NURBS

Les propriétés géométriques sont celles des BSplines avec en plus :

— la modélisation exacte des coniques

— l'influence des coordonnées homogènes ou poids :

Le paramètre w_i associé à chaque pôle permet de déformer localement

la courbe : augmenter la valeur de w_i fait se rapprocher la courbe du pôle \vec{P}_i .

4.3.4 Algorithme de Casteljau

L'algorithme peut être adapté aux formes rationnelles et aux séquences nodales non uniformes. Il faut écrire les sommets sous forme homogène \vec{P}_i^w puis utiliser l'application projective H. Ainsi :

$$\vec{C}(u) = H \left\{ \vec{P}_j^{w[p-r]} \right\} \quad u \in [u_j, u_{j+1}]$$

On retrouve à l'aide de cette méthode la relation de l'algorithme :

$$\vec{P}_i^{w[k]} = \vec{P}_i^{w[k-1]} \left(\frac{u - u_i}{u_{i+p+1-k} - u_i} \right) + \vec{P}_{i-1}^{w[k-1]} \left(\frac{u_{i+p+1-k} - u}{u_{i+p+1-k} - u_i} \right)$$

5 Bibliographie

Références

- [1] Les PIEGL et Wayne TILLER : *The NURBS Book - 2nd Edition*. Springer, 1997.
- [2] Dirk STRUIK : *Lectures on Classical Differential Geometry - Second Edition*. Dover Publications, 2000 ?
- [3] Gilbert DEMENGEL et Jean-Pierre POUGET : *Modèles de Bézier, des B-Splines et des NURBS. Outils pour l'ingénieur - Bases pour la CAO*. Ellipses, 1998.
- [4] Gerald FARIN : *Curves and Surfaces for CAGD - a practical guide - 4th edition*. Academic Press, 1997.
- [5] Gerald FARIN : *Courbes et surfaces pour la CGAO - conception géométrique assistée par ordinateur*. Masson, 1992.
- [6] Jean Claude LÉON : *Modélisation et Construction de surfaces pour la CFAO*. Hermès, 1991.
- [7] Mickael E. MORTENSON : *Geometric Modeling*. John Wiley & Sons, 1985.